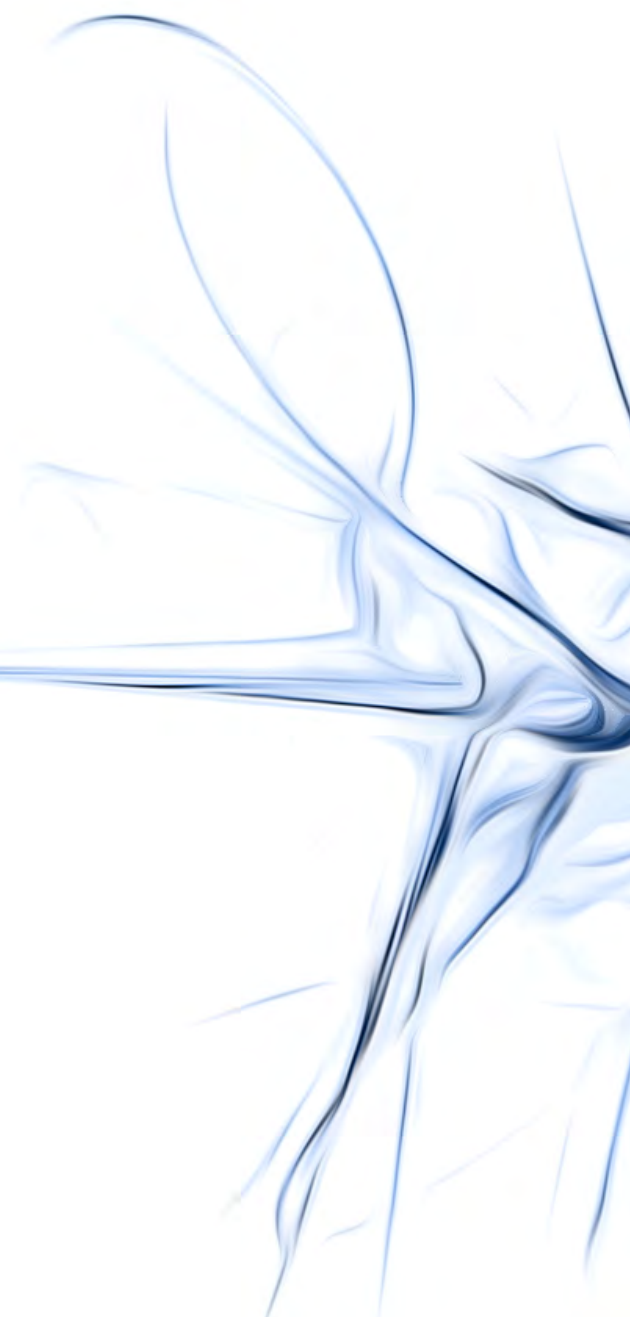


# Cálculo y Álgebra Lineal

Julio Angulo, MFIA

4



En este capítulo se desarrollan algunos conceptos matemáticos básicos necesarios para una comprensión suficiente de los actuales métodos y modelos que se utilizan en finanzas.

Repasaremos los principales conceptos del cálculo: variable, función, continuidad, derivabilidad, integrabilidad, ..., no con un carácter general ni exhaustivo, sino más bien enfocado a su aplicabilidad directa en finanzas.

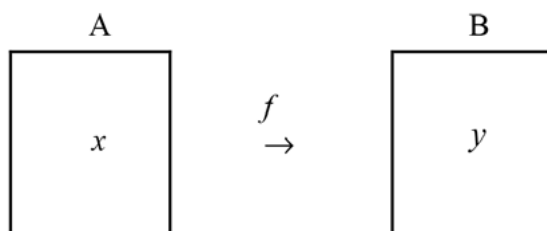
Asimismo, se desarrollarán algunos ejemplos que permitirán vislumbrar dicha aplicabilidad.

Al finalizar este capítulo se habrá adquirido un conjunto de conocimientos necesario para abordar adecuadamente otros módulos del curso.

## 1. FUNCIÓN

Sean dos conjuntos  $A$  y  $B$ . Designaremos genéricamente como  $x$  a los elementos de  $A$  y como  $y$  a los elementos de  $B$ .

Una función  $f$  es una relación entre  $A$  y  $B$ :



Se suele escribir

$$y = f(x)$$

La relación  $f$  es una función si se cumple que a cada elemento  $x$  le corresponde un único elemento  $y$ . Al conjunto  $A$  se le suele denominar dominio y al conjunto  $B$  rango de la función  $f$ .

Si  $B$  contiene números reales se dice que  $f$  es una función real.

Si los elementos de  $A$  y  $B$  son funciones  $f$  recibe el nombre de *operador*.

**Ejemplos:**

Función *exponencial*:

$$y = e^x \quad x \in \mathbb{R}$$

La función exponencial es *multiplicativa*, ya que

$$e^x e^z = e^{x+z}$$

Función *logarítmica*:

$$y = \ln x \quad x \in \mathbb{R}^+ - \{0\}$$

La función logarítmica es *aditiva*, ya que

$$\ln x + \ln y = \ln(xy)$$

**2. CONVERGENCIA Y LÍMITE**

Una sucesión de números reales  $\{x_n\}$  converge a un número  $x^* < \infty$  si dado un número  $\varepsilon > 0$  arbitrario, existe un número  $N < \infty$  tal que

$$|x_n - x^*| < \varepsilon \quad \text{para todo } n > N$$

o sea, que el término  $n$ -ésimo de la sucesión, siendo  $n$  finito aunque suficientemente grande, es muy próximo a  $x^*$ .

A  $x^*$  se le denomina límite de la sucesión  $\{x_n\}$

y se expresa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$$

**Ejemplo:**

Sea la sucesión  $x_n = \frac{1}{n} (n = 1, 2, 3, \dots)$

Elijamos  $\varepsilon = 0,000001$ . Entonces

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < 0,000001 \text{ se cumple para } n > 1.000.000$$

En general

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon \text{ se cumple para } n > 1/\varepsilon$$

luego el límite de la sucesión  $\left\{ \frac{1}{n} \right\}$  es 0.

**3. CONTINUIDAD**

Se dice que la función  $y = f(x)$  de la variable  $x$  es una función continua en  $a$  si se cumple

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

o sea, los límites por la izquierda y por la derecha existen y coinciden.

Si  $f$  es continua en todo  $a \in A$  entonces  $f$  es continua en el conjunto  $A$ .

**Ejemplos:**

La función  $y = e^x$  es continua en todo  $x$  perteneciente a  $(-\infty, \infty)$ .

Sin embargo, la función  $y = \frac{1}{t}$  no es continua en  $t = 0$ .

## 4. DERIVABILIDAD

### • DERIVADA

Sea  $y = f(x)$  una función continua de la variable  $x$

Se define la derivada de  $f$  con respecto a  $x$  como

$$f_x = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

La derivada mide la tasa de cambio de una función en respuesta al cambio de una variable de la cual depende.

Se dice que la función  $f$  es derivable en  $x$  si existen las derivadas por la izquierda y por la derecha y ambas coinciden.

### Ejemplo:

Sea la Función Exponencial  $y = e^x$ . La derivada de esta función es

$$f_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^x \cdot e^{\Delta x} - e^x}{\Delta x} = e^x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^x$$

### Ejemplo:

Sea la Función Potencial  $y = f(x) = x^n$

La derivada de esta función es

$$f_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^n + nx^{n-1}\Delta x + \dots - x^n}{\Delta x} = nx^{n-1}$$

- DERIVADA DE LA FUNCIÓN INVERSA

Sea la función  $y = f(x)$

La función inversa es  $x = f^{-1}(y) = g(y)$

$$g_y = \frac{dx}{dy} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{g(y + \Delta y) - g(y)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}$$

luego

$$f_x \cdot g_y = 1 \quad g_y = \frac{1}{f_x}$$

**Ejemplo:**

Sea la Función Logaritmo  $y = f(x) = \ln x$

La función inversa es  $x = g(y) = e^y$ . La derivada de esta función es

$$f_x = \frac{1}{g(y)} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}$$

- USO DE LA DERIVADA PARA APROXIMAR UNA FUNCIÓN

Sea la función  $y = f(x)$ . Su derivada cumple

$$f_x \cong \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

luego

$$f(x + \Delta x) \cong f(x) + f_x \cdot \Delta x$$

**Ejemplo:**

Consideremos la función cuadrática  $y = x^2$

$$\begin{aligned}f(1) &= 1 \\f(1,1) &= 1,21\end{aligned}$$

Podemos obtener  $f(1,1)$  como aproximación:

$$f(1,1) \cong f(1) + f_x(1)0,1$$

$$\begin{aligned}f_x &= 2x \\f_x(1) &= 2\end{aligned}$$

$$f(1,1) \cong 1 + 2 \cdot 0,1 = 1 + 0,2 = 1,2$$

Se ha obtenido así un valor aproximado.

- DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR

La derivada segunda de una función es la derivada de la derivada (primera):

$$f_x^{(2)} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f_x(x + \Delta x) - f_x(x)}{\Delta x}$$

En general, la derivada n-ésima es la derivada de la derivada (n-1)-ésima:

$$f_x^{(n)} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f_x^{(n-1)}(x + \Delta x) - f_x^{(n-1)}(x)}{\Delta x}$$

- DESARROLLO DE TAYLOR

Sea la función  $y = f(x)$

El valor de la función en el punto  $x + \Delta x$ , separado de  $x$  por el intervalo  $\Delta x$  viene dado por

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f_x \Delta x + \frac{1}{2} f_x^{(2)} (\Delta x)^2 + \dots + \frac{1}{n!} f_x^{(n)} (\Delta x)^n + \dots$$

Si se incluye en el desarrollo un número finito de términos se obtiene una aproximación, tanto mejor cuanto mayor sea el número de términos.

- REGLA DE LA CADENA

Sea  $y$  una función de  $x$  y  $x$  una función de  $t$ , o sea

$$y = y(x)$$

$$x = x(t)$$

Entonces

$$y_t = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt} = y_x x_t$$

**Ejemplo:**

Sean las funciones:

$$y = y_0 e^x$$

$$x = x_0 + \mu t$$

Las derivadas de estas funciones son

$$y_x = y_0 e^x = y$$

$$x_t = \mu$$

luego

$$y_t = y_x x_t = \mu y = y_0 \mu e^x = y_0 \mu e^{x_0 + \mu t}$$

## 5. INTEGRABILIDAD

Utilizaremos el operador  $\int$  para calcular sumas con un número infinito de sumandos muy pequeños (en vez de usar el operador  $\Sigma$ , usado habitualmente para sumar un número finito de términos).

Se define la integral de una función dada  $f(x)$  entre los límites 0 y  $T$  como el siguiente límite:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^N f(x_j) \Delta x = \int_0^T f(x) dx$$

siendo  $N \Delta x = T$ .

Hemos procedido del modo siguiente: dividimos el intervalo de 0 a  $T$  en  $N$  subintervalos iguales de longitud pequeña  $\Delta x$ .

El  $j$ -ésimo intervalo tiene como límites inferior y superior los valores  $x_{j-1}$  y  $x_j$ , respectivamente, siendo  $\Delta x = x_j - x_{j-1}$ . El valor medio del intervalo  $\bar{x}_j$  viene dado por

$$\bar{x}_j = \frac{x_{j+1} + x_j}{2}$$

Llamando  $S_N$  a la suma de  $N$  sumandos

$$S_N = \sum_{j=1}^N f(\bar{x}_j) \Delta x = \sum_{j=1}^N f\left(\frac{x_j + x_{j-1}}{2}\right) (x_j - x_{j-1})$$

el límite de  $S_N$  cuando  $N$  tiende a infinito y  $\Delta x$  tiende a cero es la integral anteriormente definida:

$$\int_0^T f(x) dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{j=1}^N f(x_j) \Delta x$$

Cuando el límite existe se dice que  $f(x)$  es integrable (más precisamente *riemann-integrable*, ya que esta no es la única definición de integrabilidad).

Interpretación: La cantidad  $f(\bar{x}_j) \Delta x$  equivale al área de un rectángulo cuya base es  $\Delta x$  y cuya altura es  $f(\bar{x}_j)$ , luego la suma  $S_N = \sum_{j=1}^N f(\bar{x}_j) \Delta x$  debe ser muy parecida al área comprendida entre la curva de la función  $f(x)$  y el eje horizontal. La integral  $\int_0^T f(x) dx$ , el límite de  $S_N$  es exactamente dicha área.

- REGLA DE INTEGRACIÓN

$$\int_0^T f_x dx = [f(x)]_0^T = f(T) - f(0)$$

Ejemplo: Sea la función  $f(x) = x^3$ , su integral entre los límites 0 y 2 es

$$\int_0^2 x^3 dx = \left[ \frac{x^4}{4} \right]_0^2 = \frac{2^4}{4} - \frac{0^4}{4} = 4$$

- INTEGRACIÓN POR PARTES

$$\int_0^T f_x g(x) dx = [f(T)g(T) - f(0)g(0)] - \int_0^T g_x f(x) dx$$

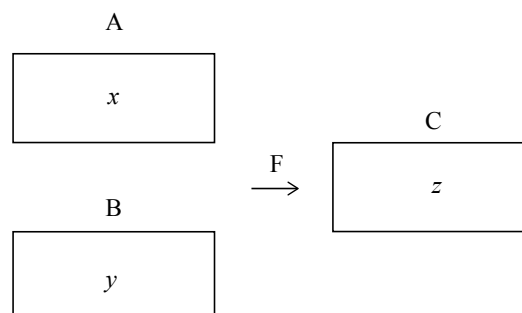
**Ejemplo:** Sea la función  $f(x) = xe^x$ , su integral entre los límites 0 y 1, utilizando el método de integración por partes, es

$$\int_0^1 xe^x dx = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - [e^x]_0^1 = e - (e - 1) = 1$$

## 6. FUNCIÓN DE DOS O MÁS VARIABLES

Sea inicialmente una función de dos variables

$$z = F(x, y)$$



El precio de una opción  $c = F(S, t)$  constituye un ejemplo:  $S$  es el precio del subyacente y  $t$  es la variable tiempo (de hecho se podrían considerar variables explicativas adicionales, como el tipo sin riesgo y la volatilidad).

## • DERIVADA PARCIAL

Se definen las derivadas parciales  $F_x$ , respecto a la variable  $x$ , y  $F_y$ , respecto a la variable  $y$ , como

$$F_x = \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x, y) - F(x, y)}{\Delta x}$$

$$F_y = \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{F(x, y + \Delta y) - F(x, y)}{\Delta y}$$

**Ejemplo:** Sea la función de dos variables  $z = F(x, y) = 2x^2y$ . Las derivadas parciales son:

$$F_x = 4xy$$

$$F_y = 2x^2$$

## • DIFERENCIAL TOTAL

Se define como

$$dF = F_x dx + F_y dy$$

Permite expresar la aproximación de la variación de una función, dadas las derivadas parciales  $F_x$  y  $F_y$  :

$$\Delta F \approx F_x \Delta x + F_y \Delta y$$

$$F(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx F(x, y) + F_x \Delta x + F_y \Delta y$$

**Ejemplo:**

$$F(x, y) = 3x + y^2$$

$$F_x = 3 \quad F_y = 2y$$

$$F(1,1;2,1) = 3 \times 1,1 + 4,41 = 7,71$$

Luego la variación real es

$$\Delta F = 0,71$$

Aproximación:

$$F(1,1;2,1) \cong F(1;2) + F_x(1;2) \times 0,1 + F_y(1;2) \times 0,1 = 7 + 3 \times 0,1 + 4 \times 0,1 = 7,7$$

Por tanto, la variación aproximada es

$$\Delta F \cong 0,7$$

## 7. MATRICES

- CONCEPTO DE MATRIZ

Una *matriz* es un conjunto de elementos distribuidos en filas y columnas. Se suele representar como  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  a una matriz de  $m \times n$  elementos ( $m$  filas y  $n$  columnas). El subíndice  $m \times n$  se denomina orden de la matriz.

Caso particular de matriz: *Vector*, constituido por una sola fila o una sola columna.

El vector fila  $a$ , formado por  $m$  elementos está representado como:

$$a = (a_1 \quad . \quad . \quad . \quad a_m)$$

Y el vector columna  $a$ , formado por  $n$  elementos, como:

$$b = \begin{pmatrix} a_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{pmatrix}$$

Una matriz  $A$  se dice que es una matriz cuadrada de orden  $n$  cuando tiene  $n$  filas y  $n$  columnas, o sea, el número de filas y el de columnas coinciden. La diagonal principal de una matriz cuadrada está formada por los elementos cuyas posiciones de fila y columna coinciden, o sea, por los elementos  $a_{ii}$ .

## • OPERACIONES CON MATRICES

### SUMA

Dadas dos matrices del mismo orden  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  y  $B = (b_{ij})_{m \times n}$  se define la suma como la matriz  $C = (c_{ij})_{m \times n}$ , tal que

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

y se expresa

$$A + B = C$$

### Ejemplo:

Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz suma  $C$  es

$$C = \begin{pmatrix} 1+3 & 2-1 & 4+0 \\ 0-3 & 4+2 & 3+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 \\ -3 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

### Ejemplo:

Dadas las matrices

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

La matriz suma  $F$  es

$$F = \begin{pmatrix} 1-1 & 0+1 \\ 0+0 & 2+4 \\ 3-1 & 5+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 6 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

### MULTIPLICACIÓN ESCALAR

Dada una matriz  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  y un número escalar  $\lambda$  se define la multiplicación escalar como una nueva matriz  $\lambda A$  dada por

$$\lambda A = (\lambda a_{ij})$$

**Ejemplo:**

Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

La multiplicación escalar por el escalar  $-4$  viene dada por

$$-4A = \begin{pmatrix} -4 \times (-3) & -4 \times 5 \\ -4 \times (-1) & -4 \times 0 \\ -4 \times 2 & -4 \times (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -20 \\ 4 & 0 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}$$

**MULTIPLICACIÓN DE MATRICES**

Dadas dos matrices  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  y  $B = (b_{jk})_{n \times h}$  tales que el número de columnas de  $A$  coincide con el número de filas de  $B$ , se define la multiplicación o producto de  $A$  por  $B$  como la matriz  $C = (c_{ik})_{m \times h}$ , tal que

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}$$

y se expresa

$$AB = C$$

El producto de matrices no es conmutativo:

$$AB \neq BA \quad (BA \text{ puede no existir})$$

**Ejemplo:**

Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

El producto de la matriz  $A$  por la matriz  $B$  es

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 2 \times 0 + 4 \times 3 & 1 \times 0 + 2 \times 2 + 4 \times 5 \\ 0 \times 1 + 4 \times 0 + 3 \times 3 & 0 \times 0 + 4 \times 2 + 3 \times 5 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 13 & 24 \\ 9 & 23 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

El producto  $BA$  estaría en este caso definido. Su resultado es

$$\begin{aligned} BA &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 0 \times 0 & 1 \times 2 + 0 \times 4 & 1 \times 4 + 0 \times 3 \\ 0 \times 1 + 2 \times 0 & 0 \times 2 + 2 \times 4 & 0 \times 4 + 2 \times 3 \\ 3 \times 1 + 5 \times 0 & 3 \times 2 + 5 \times 4 & 3 \times 4 + 5 \times 3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 8 & 6 \\ 3 & 26 & 27 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ambos productos son distintos.

**Ejemplo:**

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

El producto de la matriz  $A$  por la matriz  $B$  no está definido. Sin embargo, el producto de la matriz  $B$  por la matriz  $A$  sí lo está, siendo el resultado

$$\begin{aligned} BA &= \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -1 \times 3 + 3 \times (-3) & -1 \times (-1) + 3 \times 2 & -1 \times 0 + 3 \times 1 \\ 1 \times 3 + 2 \times (-3) & 1 \times (-1) + 2 \times 2 & 1 \times 0 + 2 \times 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -12 & 7 & 3 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- **MATRIZ UNIDAD**

Una matriz *unidad*  $I_n$  es una matriz cuadrada en la que los elementos de la diagonal principal son 1's y el resto de elementos son 0's, o sea,

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 1 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & 1 \end{pmatrix}$$

- **MATRIZ DIAGONAL**

Una matriz *diagonal*  $A$  es una matriz cuadrada en la que los elementos que no pertenecen a la diagonal principal son 0's, o sea,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & . & . & 0 \\ 0 & a_{22} & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- **MATRIZ TRANSPUESTA**

Una matriz  $A'$  es la matriz transpuesta de una matriz  $A$  cuando se verifica:

$$A = (a_{ij})_{m \times n}$$

$$A' = (a_{ji})_{n \times m}$$

Se 'intercambian' filas y columnas.

Si  $A$  es cuadrada y se cumple  $A = A'$  se dice que  $A$  es una matriz simétrica.

**Ejemplo:**

Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

la matriz transpuesta  $A$  es

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

**Ejemplo:**

Dada la matriz

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

la matriz transpuesta  $C'$  es

$$C' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Dado que  $C = C'$  la matriz  $C$  es simétrica.

- **TRAZA DE UNA MATRIZ**

La traza de una matriz cuadrada se define como la suma de los elementos de la diagonal principal. Dada una matriz  $A$  cuadrada de orden  $n$ :

$$\text{Traza}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

Las matrices  $AA'$  y  $A'A$  son simétricas y sus trazas son iguales.

**Ejemplo:**

Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 3 & 5 & -1 \\ -7 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

la traza de esta matriz es

$$\text{Traza}(A) = 1 + 5 + 1 = 7$$

- PROPIEDADES DE LAS MATRICES TRANSPUESTAS

1.  $(A')' = A$
2.  $(A + B)' = A' + B'$
3.  $(AB)' = B' A'$  (En general:  $(ABC)' = C' B' A'$ )

- DETERMINANTE

El determinante de una matriz cuadrada es un número dado por la expresión

$$|A| = \sum_{ij...r} \pm a_{1i} a_{2j} \dots a_{nr}$$

La suma se extiende a todas las permutaciones de los subíndices.

### Ejemplo:

Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

el determinante de  $A$  es

$$\begin{aligned} |A| &= 1 \times 3 \times 2 + 0 \times 1 \times (-1) + (-2) \times 1 \times 2 - [(-2) \times 3 \times (-1)] - \\ &\quad - [1 \times 1 \times 2] - [0 \times 1 \times 2] = -6 \end{aligned}$$

- PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

1.  $|A'| = |A|$
2. Un intercambio de columnas o filas contiguas cambia el signo del determinante.

- MENOR

Un menor de una matriz es el determinante de la matriz que resulta de suprimir una fila y una columna:

$|A_{ij}|$  es el menor de  $A$  que se obtiene suprimiendo la fila  $i$ -ésima y la columna  $j$ -ésima.

**Ejemplo:**

Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

el menor  $|A_{1,3}|$  es

$$|A_{1,3}| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \times 2 - 3 \times (-1) = 2 + 3 = 5$$

- COFACTOR

Un cofactor de una matriz  $A$  se define como:

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} |A_{ij}|$$

Se demuestra que el determinante de la matriz  $A$  se puede obtenerse como

$$|A| = \sum_{j=1}^n a_{ij} c_{ij}$$

luego el determinante  $|A|$  puede desarrollarse a partir de los elementos de una fila (o columna) y sus cofactores.

### Ejemplo:

Dada la matriz del ejemplo anterior

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

podemos obtener el determinante desarrollando, por ejemplo, a partir de la 1ª fila

$$\begin{aligned} |A| &= 1 \times \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - 0 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + (-2) \times \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = \\ &= 4 - 0 + (-10) = -6 \end{aligned}$$

- **RANGO DE UNA MATRIZ**

Es el *orden* del menor (de mayor orden) cuyo determinante es no-nulo.

- **MATRIZ INVERSA**

La matriz inversa de una matriz cuadrada  $A$  es la matriz  $A^{-1}$ , también cuadrada tal que

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

Proceso de obtención de una matriz inversa:

Se calcula la denominada *matriz adjunta* (transpuesta de cofactores)

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdot & \cdot & c_{n1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{1n} & \cdot & \cdot & c_{nn} \end{pmatrix}$$

Y dado que

$$A \cdot Adj(A) = Adj(A) \cdot A = \begin{pmatrix} |A| & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & |A| & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & |A| \end{pmatrix} = |A| \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix} = |A| I$$

se verifica

$$\frac{Adj(A)}{|A|} \cdot A = I$$

y, por tanto, finalmente

$$A^{-1} = \frac{Adj(A)}{|A|}$$

Para que una matriz cuadrada de orden  $n$  tenga inversa su determinante ha de cumplir  $|A| \neq 0$ , o sea, su rango debe ser igual a  $n$ .

**Ejemplo:**

Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

la matriz inversa la obtenemos como sigue:

$$|A| = -3$$

$$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \\ -6 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

En consecuencia

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A)}{|A|} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ -1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 2 & 1 & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

El rango de  $A$  es 3.

**Ejemplo:**

Dada la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|B| = 0$$

Luego  $B$  no tiene inversa. El rango de  $B$  es 2.

- PROPIEDADES DE LAS MATRICES INVERSAS

$$1. (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

$$2. (A^{-1})^{-1} = A$$

$$3. (A')^{-1} = (A^{-1})'$$

$$4. |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

- MATRIZ ORTOGONAL

Una matriz ortogonal es una matriz cuadrada  $A$  que cumple

$$A' = A^{-1}$$

Por tanto,

$$A' A = A A' = 1$$

**Ejemplo:**

La matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

es ortogonal porque se cumple:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Y, por tanto,

$$A^{-1} = A'$$

*En este capítulo se han revisado las herramientas matemáticas básicas utilizadas en la elaboración de los modelos financieros de valoración de las operaciones y sus riesgos.*

*Constituyen el punto de partida para la construcción de los modelos estocásticos que describen el comportamiento de las variables aleatorias fundamentales, los precios.*

*Dichas variables son continuas, ya que en el ámbito financiero el tiempo transcurre de modo continuo y los modelos, en general, se basan en este hecho.*

*El análisis del riesgo de las posiciones se basa en los cambios de valor cuando se producen variaciones pequeñas, de aquí la utilidad de revisar los conceptos de continuidad, derivabilidad e integrabilidad de las funciones.*

*Finalmente, el cálculo matricial, que en este módulo se ha revisado de forma muy abreviada, constituye la base de representación de los riesgos de una cartera con un número significativo de activos, y en él se basan los modelos de utilizados para el control y la gestión dinámica de dichos riesgos.*

## 8. BIBLIOGRAFÍA

- NEFTCI, S. N. (1996): *An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives*. Academic Press.
- WILMOTT, P. et al (1995): *The Mathematics of Financial Derivatives: A Student Introduction*. Cambridge University Press.
- JORION P. and GARP (Global Association of Risk Professionals) (2009): *Financial Risk Manager Handbook*. Wiley Finance.